R3 筑波大 V [B]

問1　区別できるので N! で割る必要がない

$\therefore Z_N = Z_1^N$ ⟶ ②

問2　$F = -kT \ln Z_N = -NkT \ln Z_1$ ⟶ ④

問3　(a)　$dU = -pdV + TdS$

$F = U - TS$ より

$dF = -pdV - SdT$

$\therefore S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)$ ⟶ ⑨

(b)　$U = F + TS$ ⟶ ⑥

(c)　$C = \frac{dU}{dT}$ ⟶ ⑩

問4　$\vec{J} = \vec{I} + \vec{S}$

$\vec{J}^2 = (\vec{I} + \vec{S})^2 = \vec{I}^2 + 2\vec{I}\cdot\vec{S} + \vec{S}^2$

$\therefore \vec{I}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{I}^2 - \vec{S}^2)$

$= \frac{1}{2}\left\{J(J+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right\}$

$= \frac{1}{2}\left\{J(J+1) - \frac{3}{2}\right\}$

(a)　$J = 0$ → $-\frac{3}{4}A$ ②

(b)　$J = 1$ → $\frac{1}{4}A$ ⑧

問5　$-J \le m_J \le J$ より、　$J = 1$ で $m_J = -1, 0, 1$ 、$J = 0$ で $m_J = 0$

よって、$J = 0$ では、状態は一つしかないが、$J = 1$ では 3 重に縮退している。

—①　—②　—④

$\therefore Z_1 = \sum_{J=0}^{1} \sum_{m_J=-1}^{1} e^{-\frac{A(\vec{I}\cdot\vec{S})}{kT}}$

$= \exp\left(\frac{3A}{4kT}\right) + 3\exp\left(-\frac{A}{4kT}\right)$

問6　$Z_1 = \exp\left(\frac{3A}{4kT}\right) + 3\exp\left(-\frac{A}{4kT}\right)$

(a)　$\Pi = F + TS$

$F = -kT \ln Z_N = -NkT \ln Z_1$

ここで、

$Z_1 = \exp\left(\frac{3A}{4kT}\right)\left\{1 + 3\exp\left(-\frac{A}{kT}\right)\right\}$

より、

$F = -\frac{3}{4}NA - NkT \ln\left\{1 + 3\exp\left(-\frac{A}{kT}\right)\right\}$

$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = Nk \ln\left\{1+3\exp\left(-\frac{A}{kT}\right)\right\} + NkT \frac{\cdot -\frac{A}{kT^2} 3\exp\left(-\frac{A}{kT}\right)}{1 + 3\exp\left(-\frac{A}{kT}\right)}$

$= Nk \ln\left\{1+3\exp\left(-\frac{A}{kT}\right)\right\} - \frac{NA}{T} \frac{3}{\exp\left(\frac{A}{kT}\right) + 3}$

$\therefore \Pi = -\frac{3}{4}NA + \frac{3NA}{\exp\left(\frac{A}{kT}\right) + 3}$ ——⑨"

(b)　$C = \frac{d\Pi}{dT} = 3NA \cdot \frac{-\frac{A}{kT^2}\exp\left(\frac{A}{kT}\right)}{\left\{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+3\right\}^2}$

$= 3Nk\left(\frac{A}{kT}\right)^2 \frac{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)}{\left\{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+3\right\}^2}$ ⟶ ⑨"