R3 筑波大 II [B]

問1　バネののびはそれぞれ x_1, (x_1-x_2), x_2

よってポテンシャル U は

$$U = \frac{1}{2}k\{x_1^2 + (x_1-x_2)^2 + x_2^2\}$$
$$= k(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$$

ゆえにラグラジアン L は

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2) - k(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)$$

$\longrightarrow$ (2)〃

問2　オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1,2)$$

に代入

$$\therefore \begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2-x_1) \\ \qquad = k(x_2-2x_1) \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1-2x_2) \end{cases}$$

$\longrightarrow$ (4)〃

問3　重心座標 x_g，相対座標 x_r は

$$\begin{cases} x_g = \frac{1}{2}(x_1+x_2) \\ x_r = x_1 - x_2 \end{cases}$$

$x_g = \frac{mx_1+mx_2}{m+m}$

と書けるので，運動エネルギー T は

$$T = \frac{1}{2}m\left\{(\dot{x}_g+\frac{1}{2}\dot{x}_r)^2 + (\dot{x}_g-\frac{1}{2}\dot{x}_r)^2\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2m\dot{x}_g^2 + \underline{\frac{1}{4}m\dot{x}_r^2}$$

$\longrightarrow$ (1)〃

問4　x_g, x_r をもちいて，

$$U = \frac{1}{2}k\left\{(x_g+\frac{1}{2}x_r)^2 + x_r^2 + (x_g-\frac{1}{2}x_r)^2\right\}$$
$$= kx_g^2 + \frac{3}{4}kx_r^2$$

$\longrightarrow$ (2)〃

問5　解を $x_1 = Ae^{i\omega t}$, $x_2 = Be^{i\omega t}$ とおいて、運動方程式に代入

$$\begin{cases} -m\omega^2 A = k(B-2A) \\ -m\omega^2 B = k(A-2B) \end{cases}$$

よって、行列で表すと、

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2+2k & -k \\ -k & -m\omega^2+2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

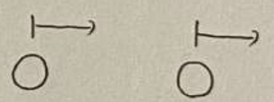
非自明でない解 $(A \neq 0, B \neq 0)$ をもつには

$$(-m\omega^2+2k)^2 - k^2 = 0$$

$$\therefore\ \omega^2 = \frac{k}{m},\ \frac{3k}{m}$$

$\underline{\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

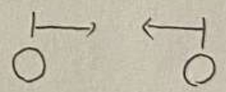
$kA - kB = 0 \quad \therefore\ A = B$



右

$\underline{\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}}$

$-kA - kB = 0 \quad \therefore\ A = -B$



左

$\longrightarrow$ $\underline{(3)}$ //