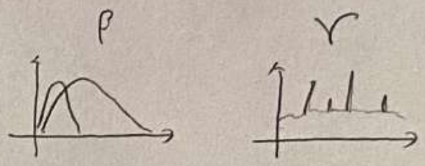
H31 東工大 午後③

(1) Ⅰ 連続的　　Ⅱ 鋭いピークをもつ



(2) NaIシンチレーター（無機シンチレーター）

密度が高く、原子番号の大きな元素からなるので、シンチレーター中でのエネルギー損失大。発光量も大きいので、良い分解能をもつ。

プラスチックシンチレーター（有機シンチレーター）

光電子増倍管の有感領域付近の波長帯の光を発生。
その光の減衰時間が非常に短く、光量も多い。

今回

γ線がシンチレーターに入射されると、光電効果が起きて多くの電子が放出される。

↳ エネルギー $h\nu$ の光子が原子に吸収され、$E = h\nu - (\text{Binding energy})$ の電子が放出される現象

⇒ シンチレーション光を強く発することができるシンチレーターが適している

→ より大きい原子番号をもつシンチレーターを選べばよい

∴ NaI(Tl) シンチレーター

(3) (ア)

$$\underbrace{\underbrace{\Phi T}_{\text{流束密度}} \times \underbrace{N_{Au}\sigma d}_{\text{確率}}}_{\text{反応する個数の期待値}} \times S = \Phi T N_{Au} \sigma d S$$

(イ)

確認

単位時間あたり1コの原子核が崩壊する確率を λ とする
dt の間に起こる崩壊の個数は

$$dN = -N\lambda\, dt$$

積分して $\int_{N}^{N_0} \frac{1}{N} dN = -\lambda \int_0^t dt$

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

ここで、半減期 $T_{\frac{1}{2}}$ を用いて

$N(t+T_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}N(t) \longrightarrow e^{-\lambda T_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} = 2^{-1} \rightarrow \ln(e^{-\lambda T_{\frac{1}{2}}}) = \ln(2^{-1})$

$$\therefore N \simeq N_0 e^{-\ln 2 (t/T_{\frac{1}{2}})} = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{\frac{1}{2}}}$$

$N_0 = \Phi T N_{Au} \sigma dS$ と書けるので、

$$\bar{N}_{Au}(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{\frac{1}{2}}}$$

$t \sim t+\Delta t$ の間に崩壊する個数は

$$N(\Delta t) = \bar{N}_{Au}(t) - \bar{N}_{Au}(t+\Delta t) = N_0 \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{\frac{1}{2}}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{t+\Delta t/T_{\frac{1}{2}}} \right\}$$

$$= N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{\frac{1}{2}}} \left\{ 1 - e^{-\ln 2 \left(\frac{\Delta t}{T_{\frac{1}{2}}}\right)} \right\}$$

$\Delta t \ll T_{\frac{1}{2}}$ $$\simeq N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{\frac{1}{2}}} \left\{ 1 - 1 + \ln 2 \left(\frac{\Delta t}{T_{\frac{1}{2}}}\right) \right\}$$

$$= N_0 e^{-\ln 2 \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}} \cdot \ln 2 \left(\frac{\Delta t}{T_{\frac{1}{2}}}\right)$$

$t \ll T_{\frac{1}{2}}$ $$\simeq N_0 \left\{ 1 - \ln 2 \left(\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}\right) \right\} \cdot \ln 2 \left(\frac{\Delta t}{T_{\frac{1}{2}}}\right)$$

$\frac{\Delta t}{T_{\frac{1}{2}}}, \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}$ の1次まで $$\simeq \Phi T N_{Au} \sigma dS \ln 2 \left(\frac{\Delta t}{T_{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\simeq \underbrace{\Phi T N_{Au} \sigma dS \frac{\Delta t}{T_{\frac{1}{2}}} \ln 2}$$

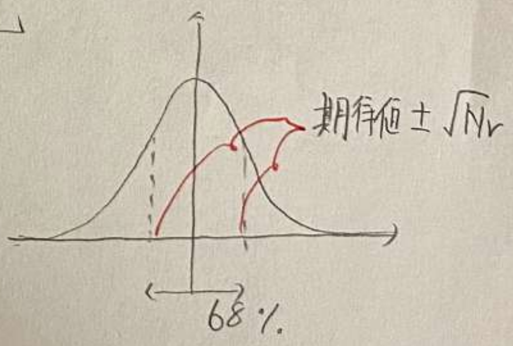
(ウ) 全立体角4πのうちΩの割合を占める

$$\therefore N_r = \varepsilon \times \frac{\Omega}{4\pi} \times \underbrace{\bar{N}(\Delta t)}$$

(エ) 光電ピーク計数は、測定を多数回行うと

$$N_r - \sqrt{N_r} \le N \le N_r + \sqrt{N_r}$$

の範囲に約68%の確率で入る。



したがってフラックスは

$$A(N_r - \sqrt{N_r}) \le \Phi \le A(N_r + \sqrt{N_r})$$

ただし $$A = \frac{T_{\frac{1}{2}}}{T N_{Au} \sigma dS \Delta t \ln 2}$$ ← $N(\Delta t)$ の Φ 以外の逆数

(4) 相対誤差σは

$$\sigma = \frac{(\text{標準偏差})}{(\text{計数})} = \frac{\sqrt{N_r}}{N_r} \times 100\% \propto \frac{1}{\sqrt{N_r}}$$

×100%

$N_r \propto \Delta t$ なので、測定時間を長くすればよい

[5]　$T_1 = 29$年　　$T_2 = 65h$　　$T_1 \gg T_2$

(5)　$N_2(0) = N_3(0) = 0$

まず, ^{90}Sr の半減期 T_1 は T_2 に比べ十分大きいので,

$0 \sim 2T_2$ の範囲では変化なし ⟶ (f)

次に, Δt の間に生成される ^{90}Y の個数は, (^{90}Sr の崩壊する個数なので (3)(イ)より)

$$N_+(t) \simeq N_1(0)\frac{\Delta t}{T_1}\ln 2$$

[ここで, 崩壊率 λ で崩壊する原子核を, 単位時間あたり一定の割合 Q で生成するとき, 時間変化は,

$$\frac{dN}{dt} = Q - \lambda N$$

両辺に $e^{\lambda t}$ をかけて

$$e^{\lambda t}\frac{dN}{dt} + \lambda N e^{\lambda t} = Qe^{\lambda t}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(Ne^{\lambda t}) = Qe^{\lambda t}$$

初期条件 $N=0$ で積分すると

$$Ne^{\lambda t} = \frac{Q}{\lambda}e^{\lambda t} + C$$

$$\therefore N(t) = \frac{Q}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})$$]

$0 \sim 2T_2$ の範囲で N_+ は一定であり, $N_2(0) = 0$

$$\therefore N_2(t) = \underbrace{N_1(0)\frac{1}{T_1}\ln 2}_{=Q=\frac{N_+}{\Delta t}} \cdot \frac{1}{\underbrace{\ln 2\frac{1}{T_2}}_{=\lambda}} \cdot \left(1 - e^{-\ln 2 \cdot \frac{t}{T_2}}\right)$$

$= \lambda$ ((3)(イ)で書いてます)

$$= N_1(0)\frac{T_2}{T_1}\left(1 - 2^{-\frac{t}{T_2}}\right) \longrightarrow (e)$$

(6)　$N_1(t) = N_1(0)2^{-\frac{t}{T_1}} \longrightarrow (h)$

N_2 :　$N_+(t) = N_1(0)2^{-\frac{t}{T_1}}\frac{\Delta t}{T_1}\ln 2$

よって, ある時刻 t' まで残る ^{90}Y の個数は (生成と崩壊が両方おこる)

$$N_2'\Delta t = N_+ \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(t'-t)/T_2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t'/T_2}\frac{N_1(0)}{T_1}\ln 2 \; 2^{\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)t}\Delta t$$

これを t で積分

$$N_2(t') = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t'}{T_2}}\frac{N_1(0)}{T_1}\ln 2\int_0^{t'} e^{\left[\ln 2\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)t\right]} dt$$

$$= N_1(0)\frac{T_2}{T_1-T_2}\left(2^{-\frac{t'}{T_1}} - 2^{-\frac{t'}{T_2}}\right) \simeq N_1(0)\frac{T_2}{T_1}2^{-\frac{t'}{T_1}} \longrightarrow (h)$$

3：粒子数保存より

$$N_3 = N_1(0) - N_1(t) - N_2(t)$$

$$\simeq N_1(0) - N_1(t)$$

$$= N_1(0)\left(1 - 2^{-\frac{t}{T_1}}\right) \longrightarrow (j)$$